Приложение 2 к РПД
Математический анализ
44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки)
направленность (профили)
Математика. Физика
Форма обучения – очная
Год набора – 2022

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

1. Общие сведения

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
3.	Направленность (профиль)	Математика. Физика
4.	Дисциплина (модуль)	Б1.О.03.01 Математический анализ
5.	Форма обучения	очная
6.	Год набора	2022

2. Перечень компетенций

– **ОПК-8**: Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний

3. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

<table>
<tr><th rowspan="2">Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины)</th><th rowspan="2">Формируемая компетенция</th><th colspan="3">Критерии и показатели оценивания компетенций</th><th rowspan="2">Формы контроля сформированности компетенций</th></tr>
<tr><th>Знать:</th><th>Уметь:</th><th>Владеть:</th></tr>
<tr><td>Введение в математический анализ</td><td>ОПК-8</td><td rowspan="10">– основные понятия, определения и свойства объектов математического анализа,
– формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства,
– возможные сферы их связи и приложения в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания;
– методы математического анализа, необходимые для решения профессиональных задач</td><td rowspan="10">– решать задачи по всем разделам курса, применять теоретический материал;
– вычислять пределы, находить производные и вычислять интегралы;
– используя определения, проводить исследования, связанные с основными понятиями;
– применять методы математического анализа к доказательству теорем и решению задач;
– использовать математический аппарат для обработки технической и педагогической информации и анализа данных;
– строить устную и письменную речь логически верно;
– доказывать утверждения математического анализа;
– уметь применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания</td><td rowspan="10">– современными знаниями о математическом анализе и его приложениях;
– аппаратом математического анализа;
– методами доказательства утверждений;
– методами и приемами решения практических задач и доказательства утверждений;
– методами построения математических моделей типовых профессиональных задач;
– способностью к обобщению, анализу, постановке цели и выбору путей ее достижения</td><td>Выполнение домашних работ
Контрольная работа «Предел числовой последовательности. Предел функции в точке»</td></tr>
<tr><td>Дифференциальное исчисление функции одной переменной</td><td>ОПК-8</td><td>Контрольная работа «Техника дифференцирования. Применение производной». Коллоквиум</td></tr>
<tr><td>Неопределенный интеграл</td><td>ОПК-8</td><td>Выполнение домашних работ
Контрольная работа «Неопределенный интеграл»</td></tr>
<tr><td>Определенный интеграл Римана и его приложения</td><td>ОПК-8</td><td>Выполнение домашних работ
Контрольная работа «Определенный интеграл»
Коллоквиум</td></tr>
<tr><td>Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных</td><td>ОПК-8</td><td>Контрольная работа «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных»; Коллоквиум</td></tr>
<tr><td>Двойные интегралы</td><td>ОПК-8</td><td>Контрольная работа «Двойные интегралы». Коллоквиум</td></tr>
<tr><td>Тройные интегралы</td><td>ОПК-8</td><td>Контрольная работа «Тройные интегралы». Коллоквиум</td></tr>
<tr><td>Криволинейные и поверхностные интегралы</td><td>ОПК-8</td><td>Контрольная работа Криволинейные и поверхностные интегралы</td></tr>
<tr><td>Числовые и функциональные ряды</td><td>ОПК-8</td><td>Контрольная работа «Числовые и функциональные ряды»</td></tr>
<tr><td>Дифференциальные уравнения</td><td>ОПК-8</td><td>Контрольная работа «Дифференциальные уравнения»
Итоговое тестирование
Решение дополнительных задач</td></tr>
</table>

Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы:

«неудовлетворительно» – 60 баллов и менее; «удовлетворительно» – 61-80 баллов; «хорошо» – 81-90 баллов; «отлично» – 91-100 баллов

4. Критерии и шкалы оценивания

4.1. Выполнение домашнего задания

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-90	91-100
Количество баллов за выполненное домашнее задание	0,2	0,5	0,8	1

4.2. Выполнение контрольной работы

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-90	91-100
Количество баллов за выполнение контрольной работы	5	10	15	20

4.3. Критерии, используемые при оценивании теоретического коллоквиума

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-90	91-100
Количество баллов за выполнение контрольной работы	3	4-7	8-9	10

4.4. Итоговый тест

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-90	91-100
Количество баллов за выполненный тест	1-12	13-16	17-18	19-20

4.5. Решение дополнительных задач

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-90	91-100
Количество баллов за решенные дополнительные задачи	5	10	15	20

5. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

5.1. Типовое домашнее задание

1. Доказать, что предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$.

Решение. Пусть при n > N верно $\left|0-\dfrac{(-1)^n}{n}\right|<\varepsilon$, т.е. $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$. Это верно при $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$, таким образом, если за N взять целую часть от $\dfrac{1}{\varepsilon}$, то утверждение, приведенное выше, выполняется.

2. Найти предел $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-4}{x-6}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

3. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

Решение. Домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$$

$$=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1.$$

4. Найти производную функции $y=x\cos x\sin x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x$.

Решение. Сначала преобразуем данную функцию: $y=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x$

$$y'=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}x2\cos 2x+\frac{1}{2}2\cos x(-\sin x)=\frac{1}{2}\sin 2x+x\cos 2x-\sin x\cos x=x\cos 2x.$$

5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Решение. При попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$.
Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$; $g'(x) = e^x$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e}$;

5.2. Примерные дополнительные задачи

1. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

Решение. Находим область существования функции. Очевидно, что областью определения функции является область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.
В свою очередь, видно, что прямые $x = 1$, $x = -1$ являются вертикальными асимптотами кривой.
Областью значений данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$.
Точками разрыва функции являются точки $x = 1$, $x = -1$.
Находим критические точки.
Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.
Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1) - (x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5+4x^3-6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

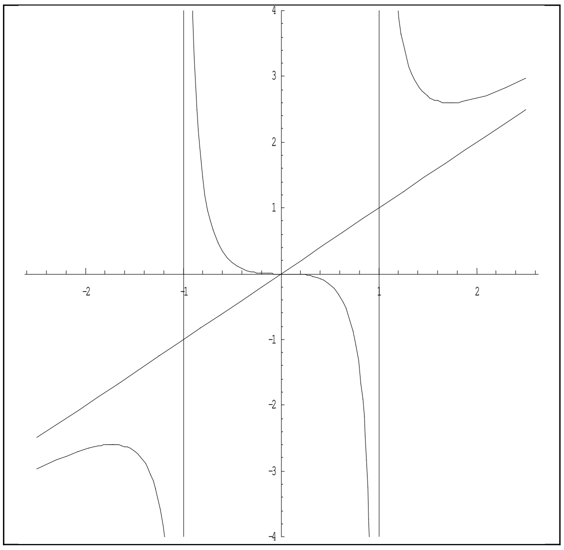
Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, кривая выпуклая
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая
$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая
$0 < x < 1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая
$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, кривая вогнутая
$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая
Находим промежутки возрастания и убывания функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает
$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает
$0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает
$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает
$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, функция возрастает
Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой максимума, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой минимума.
Значения функции в этих точках равны соответственно $3\sqrt{3}/2$ и $-3\sqrt{3}/2$.
Про вертикальные асимптоты было уже сказано выше. Теперь найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – $y = x$.

Построим график функции:



2. Вычислить интеграл: $\int x^2 \sin x dx$.

Решение. $\int x^2 \sin x dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$

3. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \{x+1=t\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x+1}{3} + C.$$

4. Вычислить интеграл: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$

Решение.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \left\{\begin{matrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

5. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ в точке M(1, 1, 1).

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$z - 1 = -(x-1) + 2(y-1); \qquad x - 2y + z = 0;$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1};$$

6. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2 x$ в точке А(1, 2) по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, если В (3, 0).

Решение.

Прежде всего необходимо определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}=(3\text{-}1;\ 0\text{-}2) = (2;\ -2) = 2\vec{i} - 2\vec{j}\ .$$

Далее определяем модуль этого вектора: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Находим частные производные функции z в общем виде: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx;$

Значения этих величин в точке А : $\frac{\partial z}{\partial x} = 6;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4;$

Для нахождения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$ производим следующие преобразования:

$$\vec{S} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta = \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{j}$$

За величину $\vec{S}$ принимается произвольный вектор, направленный вдоль заданного вектора, т.е. определяющего направление дифференцирования.

Отсюда получаем значения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Окончательно получаем: $\frac{\partial z}{\partial s} = 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ - значение производной заданной функции по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$.

5.3. Типовые контрольные работы

Контрольная работа «Предел числовой последовательности. Предел функции в точке»

1. Найти области определения следующих функций:

а) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$; б) $y = \arccos\frac{2x}{1+x}$; в) $y = \sqrt{25 - x^2} + \lg\sin x$.

2. Найти пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2 + 3n - 5}{1 - n^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{5x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{3x}$, г) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{9x^2+4x-1}$, е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+4}{9x^3-2x}$, ж) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{1}{x-5} - \frac{10}{x^2-25}\right)$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1а	$(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$
1б	$\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$
1в	$[-5; -\pi) \cup (0; \pi)$
2а	-3
2б	$-0{,}1$
2в	$\frac{8}{3}$
2г	$\frac{9}{16}$

2д	$\frac{2}{9}$
2е	0
2ж	$\frac{1}{10}$

Контрольная работа «Техника дифференцирования»

1. Найти производную $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$.

2. Найти производную $y = x + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$.

3. Найти производную $y = \ln^3(1+\cos x)$.

4. Найти производную $y = ctg(\cos 5) - \frac{1}{40}\frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$.

5. Найти производную $y = arctg\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

6. Найти производную $y = \frac{shx}{1+chx}$.

7. Найти производную $y = x^{\sin x^3}$.

8. Найти производную $y = \frac{4x+1}{16x^2+8x+3} + \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\frac{4x+1}{\sqrt{2}}$.

9. Найти производную $y = 2\arcsin\frac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2+24x+12}$.

10. Найти производную $y = \frac{1}{\sin\alpha}\ln(tgx + ctg\alpha)$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	$\frac{x}{\sqrt{(1-3x^4)^3}}$
2	$1-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}-\frac{e^x}{1+e^x}$
3	$\frac{-3\sin x\ln^2(1+\cos x)}{1+\cos x}$
4	$\frac{\sin^2 40x+2\cos^2 20x\cos 40x}{2\sin^2 40x}$
5	$\frac{-1-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(x^2+(\sqrt{1+x^2}-1)^2}$
6	$\frac{chx(1+chx)-sh^2x}{(1+chx)^2}$
7	$x^{\sin x^3}\left(3\cos(x^3)\cdot x^2\cdot\ln x+\frac{\sin x^3}{x}\right)$
8	$\frac{-48x^2-24x+7}{(16x^2+8x+3)^2}$
9	$\frac{27x^2+72x+36}{(3x+4)\sqrt{9x^2+24x+12}}$
10	$\frac{1}{\sin\alpha\cos^2 x(tgx+ctg\alpha)}$

Контрольная работа «Применение производной»

1. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

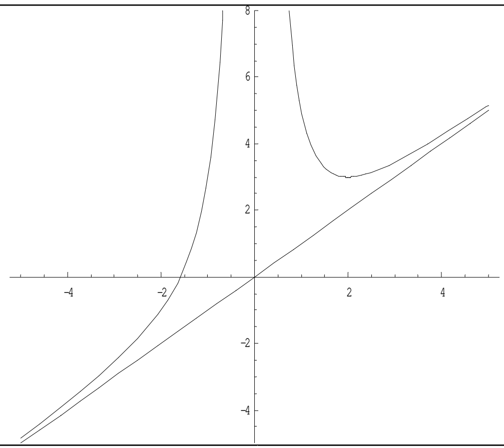
2. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$ и построить ее график.

3. Найти точки экстремума функции $y = x(x-1)^3$.

4. Определить ввозрастание и убывание функции, точки экстремума функции $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2; 1]$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	$x = 0$, $y = x + 2$
2	
3	$x = 1$ и $x = \dfrac{1}{4}$
4	y′< 0 при любом x ≠ 0, следовательно, функция убывает на всей области определения и не имеет экстремумов
5	$f_{наиб.} = 17$ при $x = -2$, $f_{наим.} = 0$ при $x = -1$

Контрольная работа «Неопределенный интеграл»

1. Вычислить $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx$

2. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

3. Вычислить применяя формулу интегрирования по частям $\int e^{2x} \cos x dx$.

4. Вычислить $\int \dfrac{\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 + x^2}}{\sqrt{4 - x^4}} dx$.

5. Вычислить $\int \dfrac{\ln x}{x^3} dx$.

6. Найти интеграл $\int \dfrac{7x - 2}{3x^2 - 5x + 4} dx$.

7. Вычислить $\int \dfrac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2+2)^2} dx$.

8. Вычислить используя тригонометрическую подстановку $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	$\dfrac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C$

2	$\frac{2}{3}\sin^{3/2}x + C$
3	$e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx$
4	$\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C$
5	$-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$
6	$\frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right| + \frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C$
7	$3\ln\left|x+3\right| - \frac{1}{x^2+2} + \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}} + C$
8	$\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$

Контрольная работа «Определенный интеграл и его применения»

1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.
3. Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.
4. Найти объем произвольной пирамиды с высотой H и площадью основания S.
5. Вычислить $\int_1^2 \frac{x+2}{3-x}dx$.
6. Вычислить $\int_{-1}^0 xe^{-x}dx$
7. Вычислить $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4x-2}dx$
8. Вычислить $\int_2^5 \frac{dx}{2x-3}$
9. Вычислить $\int_0^{\pi}\left(2x+\sin 2x\right)dx$
10. Вычислить $\int_0^{\lg 2} 2^x \cdot 5^x dx$

Ключ

№ задания	Правильный ответ	№ задания	Правильный ответ
1	$\frac{\pi}{4}$	6	-1
2	$S=\frac{5}{6}$	7	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
3	$S = 2\pi r$	8	$\frac{1}{2}\ln 7$
4	$V=\frac{1}{3}SH$	9	π^2
5	$5\ln 2 - 1$	10	$\frac{1}{\ln 10}$

Контрольная работа «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных»

1. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

2. Найти полный дифференциал функции $z = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$.

3. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ в точке $M(1;1;1)$.

4. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

5. Найти экстремум функции $f(x;y) = xy$, если уравнение связи: $2x + 3y - 5 = 0$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	$du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$
2	$dz = -\dfrac{2xy}{(x^2 - y^2)} dx + \dfrac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2} dy$
3	$x - 2y + z = 0$, $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$
4	$du \approx 1{,}05$
5	$\left(\dfrac{5}{4}; \dfrac{5}{6}\right)$

Контрольная работа «Числовые и функциональные ряды»

1. Если $f(x) = x^3 - 1$, то коэффициент a_4 разложения данной функции в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ равен…

   а) 1; б) 0,25; в) 0; г) 3.

2. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен 10, тогда интервал сходимости имеет вид…

   а) $(0;10)$; б) $(-10;10)$; в) $[-5;5]$; г) $(-10;0)$.

3. Второй член a_2 числовой последовательности $a_n = \dfrac{2^{2n-1}}{2n}$ равен …

4. Установите соответствие между рядами и их названиями.

   1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + 4}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2n+3}$.

   а) знакочередующийся; б) знакоположительный; в) степенной.

5. Укажите сходящиеся числовые ряды.

   1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$.

6. Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{5^n}$

7. Определить область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^n}$

Ключ

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
Правильный ответ	в	б	2	1-б, 2-а, 3-в	1 и 4	сходится	$(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$

Контрольная работа «Кратные интегралы. Криволинейные интегралы»

1. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x-y)dxdy$, если область Δ ограничена линиями: y = 0, $y = x^2$, x = 2.
2. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями y = x, x = 0, y = 1, y = 2.
3. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями $x=0$, $x=y^2$, $y=2$ y = 2.
4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\Delta}y\ln x dxdy$, если область интегрирования ограничена линиями $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$.
5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2}\int\limits_0^{xy}x^2yzdzdydx$.
6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x+4$; $x+y-2=0$.
7. Вычислить объем, ограниченный поверхностями: $x^2+y^2=1$; $x+y+z=3$ и плоскостью *XOY*.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	0,8
2	5
3	$\frac{244}{21}$
4	$\frac{5\ln 2}{4}-\frac{5}{8}$
5	$\frac{1}{104}$
6	$21\frac{1}{3}$
7	$V=3\pi$

Контрольная работа «Дифференциальные уравнения»

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'+y=0$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'+y=0$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy'=\frac{-2x}{\cos y}$

4. Решить уравнение $y'=\frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}+1\right)$.

5. Решить уравнение $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	$y=\frac{C}{x}$
2	$y=C_1\cdot e^{-x}$
3	$y\sin y+\cos y+x^2+C=0$
4	$y=xe^{Cx}$
5	$x^2-x+xy+3y-y^2=C$

5.4. Типовой итоговый тест:

1. Раздел: Элементы теории пределов
- 1.1. Область определения функции
- 1.2. Предел функции
- 1.3. Непрерывность функции, точки разрыва
- 1.4. Асимптоты графика функции

2. Раздел: Дифференциальное исчисление функций одной переменной
- 2.1. Производные первого порядка
- 2.2. Производные высших порядков
- 2.3. Приложения дифференциального исчисления ФОП
- 2.4. Дифференциалы и теоремы о дифференцируемых функциях

3. Раздел: Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных
- 3.1. Частные производные первого порядка
- 3.2. Частные производные высших порядков
- 3.3. Полный дифференциал
- 3.4. Производная по направлению и градиент

4. Раздел: Интегральное исчисление
- 4.1. Основные методы интегрирования
- 4.2. Свойства определенного интеграла
- 4.3. Методы вычисления определенного интеграла
- 4.4. Приложения определенного интеграла

5. Раздел: Элементы теории рядов
- 5.1. Числовые последовательности
- 5.2. Сходимость числовых рядов
- 5.3. Область сходимости степенного ряда
- 5.4. Ряд Тейлора (Маклорена)

Наименование элемента содержания (тема)		Перечень учебных элементов *Обучающийся должен*:
		1. Элементы теории пределов
1-01-01	Область определения функции	***знать:*** области определения основных элементарных функций ***уметь:*** находить области определения элементарных функций
1-01-02	Предел функции	***знать:*** метод раскрытия неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при вычислении пределов дробно-рациональных функций; методы раскрытия неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ при вычислении пределов дробно-рациональных функций; первый и второй замечательные пределы и их следствия, эквивалентные бесконечно малые функции ***уметь:*** уметь: применять метод раскрытия неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при вычислении пределов дробно-рациональных функций; применять методы раскрытия неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ при вычислении пределов дробно-рациональных функций; применять первый и второй замечательные пределы и их следствия при вычислении пределов функций
1-01-03	Непрерывность функции, точки разрыва	***знать:*** определение и условия непрерывности функции в точке; определение точек разрыва функции; теоремы о непрерывности функций в точке; определение непрерывности функции на промежутке ***уметь:*** находить точки разрыва дробно-рациональной функции; находить точки разрыва функций, заданных различными аналитическими выражениями на разных промежутках; находить область непрерывности функции
1-01-04	Асимптоты графика функции	***знать:*** определения асимптот графика функции; формулы для вычисления параметров уравнения наклонной асимптоты графика функции ***уметь:*** находить вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты графика функции
2-01-01	Область определения функции	***знать:*** области определения основных элементарных функций ***уметь:*** находить области определения основных элементарных функций
2-01-02	Предел функции	***знать:*** методы раскрытия неопределенностей вида $\left\{\infty-\infty\right\}$, $\left\{1^{\infty}\right\}$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и $\left(\frac{0}{0}\right)$ при

Наименование элемента содержания (тема)		Перечень учебных элементов *Обучающийся должен*:
		вычислении пределов дробно-рациональных функций; первый и второй замечательные пределы и их следствия, эквивалентные бесконечно малые функции; определение односторонних пределов функции; бесконечно малые и бесконечно большие функции и их взаимосвязь ***уметь:*** применять методы раскрытия неопределенностей вида $\left\{\infty-\infty\right\}$, $\left\{1^{\infty}\right\}$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и $\left(\frac{0}{0}\right)$ при вычислении пределов дробно-рациональных функций; применять первый и второй замечательные пределы и эквивалентные бесконечно малые функции при вычислении пределов функций; вычислять односторонние пределы функций; применять теоремы о связи между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями
2-01-03	Непрерывность функции, точки разрыва	***знать:*** определение и условия непрерывности функции в точке; определение точек разрыва функции; теоремы о непрерывности функций в точке; определение непрерывности функции на промежутке ***уметь:*** находить точки разрыва функций; определять вид точек разрыва; находить область непрерывности функции
2-01-04	Асимптоты графика функции	***знать:*** определения асимптот графика функции; формулы для вычисления параметров уравнения наклонной асимптоты графика функции ***уметь:*** находить вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты графика функции
2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной		
1-02-01	Производные первого порядка	***знать:*** основные правила дифференцирования функций; производные основных элементарных функций; правило дифференцирования сложной функции ***уметь:*** вычислять производную алгебраической суммы нескольких функций; производную частного двух функций; вычислять производную сложной функции
1-02-02	Производные высших порядков	***знать:*** определение производных высших порядков; основные правила дифференцирования и производные основных элементарных функций; правило дифференцирования сложной функции ***уметь:*** вычислять производные высших порядков
1-02-03	Приложения дифференциаль ного исчисления ФОП	***знать:*** геометрический смысл производной функции в точке; физический смысл производной функции; достаточные условия экстремума функции; достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции ***уметь:*** вычислять производные элементарных функций, угловой коэффициент касательной, скорость движения материальной точки; находить экстремумы функции; находить промежутки выпуклости и вогнутости графика функции
1-02-04	Дифференциал ы и теоремы о дифференцируе мых функциях	***знать:*** основные правила дифференцирования функций; производные основных элементарных функций; правило дифференцирования сложной функции; определение дифференциала функции; формулу приближенного вычисления значения функции с помощью дифференциала; правило Лопиталя ***уметь:*** вычислять производную сложной функции; находить дифференциал функции; вычислять приближенное значение функции с помощью дифференциала; применять правило Лопиталя
2-02-01	Производные первого порядка	***знать:*** производные основных элементарных функций; правило дифференцирования сложных функций и функций, заданных неявно; формулу дифференцирования функций, заданных параметрическими соотношениями ***уметь:*** вычислять производные сложных функций
2-02-02	Производные высших порядков	***знать:*** определение производной высших порядков; правила дифференцирования производной сложной функции ***уметь:*** вычислять производную сложной функции; находить производные высших порядков
2-02-03	Приложения дифференциаль ного исчисления ФОП	***знать:*** геометрический и физический смысл производной; достаточные условия монотонности функции на промежутке; достаточные условия выпуклости и вогнутости функции; необходимое условие и достаточные условия (признаки) существования экстремума функции в точке; правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке; уравнение касательной к графику функции ***уметь:*** находить скорость и ускорение движения материальной точки; находить промежутки монотонности функции; находить промежутки выпуклости и вогнутости графика функции; находить точки экстремума и экстремум функции; находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке; применять теорию максимума и минимума к решению практических задач; строить уравнение касательной к графику функции
2-02-04	Дифференциал ы и теоремы о дифференцируе мых функциях	***знать:*** определение дифференциала функции; формулу приближенного вычисления значения функции с помощью дифференциала; теорему Ролля; правило Лопиталя ***уметь:*** вычислять дифференциал функции; вычислять приближенное значение функции с помощью дифференциала; применять теорему Ролля и правило Лопиталя
3. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных		
1-03-01	Частные производные первого порядка	***знать:*** правила вычисления частных производных функций нескольких переменных ***уметь:*** вычислять частные производные первого порядка функций нескольких переменных
1-03-02	Частные производные высших порядков	***знать:*** определение частных производных второго порядка функции двух переменных; правила нахождения частных производных функции двух переменных ***уметь:*** находить частные производные второго порядка функции двух переменных; находить значение производных второго порядка функции двух переменных в заданной точке
1-03-03	Полный дифференциал	***знать:*** определение полного дифференциала функции двух переменных; правила нахождения частных производных функции двух переменных

Наименование элемента содержания (тема)		Перечень учебных элементов *Обучающийся должен*:
		уметь: находить полный дифференциал функции двух переменных; находить частные производные функции двух переменных
1-03-04	Производная по направлению и градиент	***знать:*** определение градиента функции двух переменных; определение производной по направлению функции двух переменных; определение направляющих косинусов вектора ***уметь:*** находить градиент функции двух переменных; находить производную по направлению функции двух переменных; вычислять градиент и производную по направлению функции двух переменных в заданной точке; находить направляющие косинусы вектора
2-03-01	Частные производные первого порядка	***знать:*** правила вычисления частных производных функций нескольких переменных, правила дифференцирования сложной функции ***уметь:*** вычислять частные производные функций нескольких переменных; производные сложных функций
2-03-02	Частные производные высших порядков	***знать:*** правила вычисления частных производных функций нескольких переменных; определение частных производных второго порядка функций нескольких переменных ***уметь:*** находить частные производные функций нескольких переменных; находить частные производные второго порядка функций нескольких переменных
2-03-03	Полный дифференциал	***знать:*** правила вычисления частных производных функций нескольких переменных, формулу полного дифференциала функции двух переменных, формулу приближенного подсчета значения функции нескольких переменных с применением полного дифференциала 1-го порядка ***уметь:*** вычислять частные производные функций нескольких переменных; приближенно вычислять значение функции нескольких переменных с помощью полного дифференциала 1-го порядка
2-03-04	Производная по направлению и градиент	***знать:*** определение градиента функции нескольких переменных; определение модуля градиента функции нескольких переменных; определение производной по направлению функции нескольких переменных; определение направляющих косинусов вектора; правила вычисления частных производных функций нескольких переменных ***уметь:*** находить градиент функции нескольких переменных; находить модуль градиента функции нескольких переменных находить производную по направлению функции нескольких переменных; вычислять градиент и производную по направлению функции нескольких переменных в заданной точке; вычислять частные производные функций нескольких переменных
4. Интегральное исчисление		
1-04-01	Основные методы интегрирования	***знать:*** определения первообразной и неопределенного интеграла функции, их свойства, таблицу основных интегралов; метод замены переменной и метод интегрирования по частям неопределенного интеграла ***уметь:*** находить первообразные функции, то есть неопределенный интеграл функции
1-04-02	Свойства определенного интеграла	***знать:*** свойства определенного интеграла; формулу для вычисления среднего значения функции на отрезке ***уметь:*** применять свойства определенного интеграла; вычислять среднее значение функции на отрезке
1-04-03	Методы вычисления определенного интеграла	***знать:*** формулу Ньютона – Лейбница; метод замены переменной интегрирования (метод подстановки) в определенном интеграле; метод интегрирования по частям в определенном интеграле ***уметь:*** вычислять определенный интеграл с использованием формулы Ньютона – Лейбница; вычислять интеграл с помощью метода замены переменной интегрирования в определенном интеграле; применять метод интегрирования по частям в определенном интеграле
1-04-04	Приложения определенного интеграла	***знать:*** геометрический смысл определенного интеграла; знать формулы вычисления площади плоской фигуры ***уметь:*** выражать и вычислять площадь плоской фигуры, ограниченной непрерывными кривыми, с помощью определенного интеграла
2-04-01	Основные методы интегрирования	***знать:*** определения первообразной и неопределенного интеграла функции, их свойства, таблицу основных интегралов; метод замены переменной, метод и формулу интегрирования по частям неопределенного интеграла ***уметь:*** находить первообразные функции или неопределенный интеграл функции; находить неопределенный интеграл методом замены переменной и с помощью формулы интегрирования по частям
2-04-02	Свойства определенного интеграла	***знать:*** определение определенного интеграла; свойства определенных интегралов; формулу для вычисления среднего значения функции на отрезке ***уметь:*** применять свойства определенных интегралов; вычислять среднее значение функции на отрезке
2-04-03	Методы вычисления определенного интеграла	***знать:*** формулу Ньютона – Лейбница; метод замены переменной интегрирования (метод подстановки) в определенном интеграле; метод интегрирования по частям в определенном интеграле; обобщенную формулу Ньютона – Лейбница ***уметь:*** вычислять определенный интеграл с использованием формулы Ньютона – Лейбница; вычислять интеграл с помощью метода замены переменной интегрирования в определенном интеграле; вычислять определенный интеграл с помощью формулы интегрирования по частям; определять сходимость несобственного интеграла
2-04-04	Приложения определенного интеграла	***знать:*** геометрический смысл определенного интеграла; знать формулы объема тел вращения вокруг осей координат и длины дуги кривой ***уметь:*** выражать площадь плоской фигуры, ограниченной непрерывными кривыми, с помощью определенного интеграла; выражать с помощью определенного интеграла и вычислять объемы тел, образованных вращением вокруг осей координат плоской фигуры; вычислять длину дуги кривой
5. Элементы теории рядов		

Наименование элемента содержания (тема)		Перечень учебных элементов *Обучающийся должен*:
1-05-01	Числовые последовательности	***знать:*** определение общего члена числовой последовательности, определение и свойства бесконечно малых последовательностей ***уметь:*** вычислять пределы числовых последовательностей при $n \to \infty$; находить члены числовой последовательности с помощью формулы общего члена; применять свойства бесконечно малых последовательностей для вычисления пределов; находить общий член числовой последовательности
1-05-02	Сходимость числовых рядов	***знать:*** определение суммы ряда; определение бесконечно убывающей геометрической прогрессии; сходящиеся и расходящиеся гармонические ряды, признаки сходимости Коши и Даламбера, необходимый признак сходимости ряда, теорему Лейбница ***уметь:*** вычислять *n*-ую частичную сумму ряда; вычислять сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии; применять основные признаки сходимости рядов с произвольными членами
1-05-03	Область сходимости степенного ряда	***знать:*** определение области сходимости степенного ряда; формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда ***уметь:*** преобразовывать степенные ряды и вычислять их радиусы сходимости; находить область сходимости степенного ряда
1-05-04	Ряд Тейлора (Маклорена)	***знать:*** определение ряда Маклорена; структуру ряда Маклорена и выражения для рядов часто используемых функций; определение коэффициентов ряда Тейлора ***уметь:*** получать разложение функции в ряд Маклорена; находить ряды Маклорена функций на основе известных рядов; находить коэффициенты ряда Тейлора
2-05-01	Числовые последовательности	***знать:*** определение общего члена числовой последовательности; определение предела числовой последовательности; замечательные пределы ***уметь:*** вычислять пределы числовых последовательностей при $n \to \infty$; находить члены числовой последовательности с помощью формулы общего члена; использовать замечательные пределы
2-05-02	Сходимость числовых рядов	***знать:*** определение суммы числового ряда; формулу для вычисления суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии; сходящиеся и расходящиеся гармонические ряды, признаки сходимости Коши и Даламбера, необходимый признак сходимости ряда; признак сходимости Лейбница ***уметь:*** вычислять сумму сходящегося числового ряда; применять основные признаки сходимости рядов с произвольными членами
2-05-03	Область сходимости степенного ряда	***знать:*** определение области сходимости степенного ряда; формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда ***уметь:*** преобразовывать степенные ряды и вычислять их радиусы сходимости; исследовать сходимость ряда на границах интервала сходимости
2-05-04	Ряд Тейлора (Маклорена)	***знать:*** формулу ряда Маклорена функции; определение коэффициентов ряда Маклорена; формулу ряда Тейлора и методы определения его области сходимости; способы разложения функций в ряды Тейлора ***уметь:*** преобразовывать ряды и применять ряды Маклорена и Тейлора основных функций; находить коэффициенты ряда Тейлора и ряда Маклорена

Примерные тестовые задания по разделам (темам):

1. Раздел: Элементы теории пределов

1.1. Область определения функции

Область определения функции $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2 + 5x + 4}$ имеет вид

Решение: Данная функция определена, если подкоренное выражение в числителе неотрицательно, а знаменатель не равен нулю. Тогда $\begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ x^2 + 4x + 5 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3, \\ x \neq -4, x \neq -1. \end{cases}$

Следовательно, получаем, что $x \in [-3, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2. Раздел: Дифференциальное исчисление функций одной переменной

2.2. Производные высших порядков

Производная второго порядка функции $y = \sin(4x^2 - 1)$ равна …

Решение: Вычислим производную первого порядка: $y' = \left(\sin(4x^2 - 1)\right)' = \cos(4x^2 - 1)(4x^2 - 1)' = 8x\cos(4x^2 - 1)$.

Тогда производная второго порядка вычисляется как производная от производной первого порядка, то

$$y'' = (y')' = 8\left(x\cos\left(4x^2 - 1\right)\right)' = 8\left(x'\cos\left(4x^2 - 1\right) + x\left(\cos\left(4x^2 - 1\right)\right)'\right) =$$

есть $= 8\left(\cos\left(4x^2 - 1\right) - 8x^2\sin\left(4x^2 - 1\right)\right).$

3. Раздел: Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

3.1. Частные производные первого порядка

Значение частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \sin\dfrac{x}{y^2}$ в точке $M\left(\dfrac{\pi}{3};1\right)$ равно …

Решение: При вычислении частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ по переменной y переменную x рассматриваем как постоянную величину. Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(\sin\dfrac{x}{y^2}\right)'_y = \cos\dfrac{x}{y^2}\cdot\left(\dfrac{x}{y^2}\right)'_y = -\dfrac{2x}{y^3}\cos\dfrac{x}{y^2}.$

$$\frac{\partial z(M)}{\partial y} = -\frac{2\frac{\pi}{3}}{1^3}\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{1^2} = -\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

4. Раздел: Интегральное исчисление

4.1. Основные методы интегрирования

Множество первообразных функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2}$ имеет вид …

Решение:

Чтобы определить множество первообразных, вычислим неопределенный интеграл от этой функции. Разложив знаменатель дробно-рациональной функции на линейные множители, получаем

$$\int\frac{dx}{x^2 + 3x + 2} = \int\frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= \ln|x+1| - \ln|x+2| + C = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C.$$

5. Раздел: Элементы теории рядов

5.2. Сходимость числовых рядов

Сумма числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n - 4^n}{12^n}$ равна …

Решение: Представим общий член этого ряда в виде суммы $a_n = \dfrac{3^n - 4^n}{12^n} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = b_n - c_n.$.

Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ представляют собой бесконечно убывающие геометрические прогрессии.

Следовательно, эти ряды сходятся, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = \dfrac{1/4}{1 - 1/4} = \dfrac{1}{3};$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1/3}{1 - 1/3} = \dfrac{1}{2}.$ Таким образом, сумма данного числового ряда равна: $S = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{6}.$

6. Кейс-задания: Кейс 1 подзадача 1

При доходе потребителя, равном М = 4 у.е., потребление некоторого блага составляет Х = 50 ед. Известно, что скорость изменения спроса по доходу равна $\dfrac{dX}{dM} = \dfrac{40}{(M+1)^2}.$ Функция спроса по доходу выражается зависимостью …

Решение: Проинтегрируем по t обе части дифференциального уравнения $\frac{dX}{dM} = \frac{40}{(M+1)^2}$.

Тогда $X(M) = -\frac{40}{M+1} + C$. Так как $X(4) = -\frac{40}{4+1} + C = 50$, то C=58

Таким образом, $X(M) = -\frac{40}{M+1} + 58$.

Кейс-задания: Кейс 1 подзадача 2

При доходе потребителя, равном М = 4 у.е., потребление некоторого блага составляет Х = 50 ед. Известно, что скорость изменения спроса по доходу равна $\frac{dX}{dM} = \frac{40}{(M+1)^2}$.

Объем спроса при $M = 9$ равен …

Решение: Вычислим $X(9) = -\frac{40}{9+1} + 58 = 54$.

Кейс-задания: Кейс 1 подзадача 3

При доходе потребителя, равном М = 4 у.е., потребление некоторого блага составляет Х = 50 ед. Известно, что скорость изменения спроса по доходу равна $\frac{dX}{dM} = \frac{40}{(M+1)^2}$.

Наибольшее значение объема потребления **не превзойдет** величины …

Решение: Функция $\frac{dX}{dM} = \frac{40}{(M+1)^2}$. является возрастающей и $\lim\limits_{M\to\infty} X(M) = 58$, то есть существует горизонтальная асимптота Х=58 Следовательно, наибольшее значение объема потребления не превзойдет величин $X \geq 58$.

5.5. Вопросы к зачетам и экзаменам

Примерные вопросы к коллоквиумам, зачетам и экзаменам

1) Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. Множества и основные операции над ними.
2. Отображения множеств и их виды.
3. Вещественные числа. Простейшее назначение вещественных чисел. Доказательство того, что диагональ единичного квадрата не может быть измерена рациональным числом. Замечания 1 – 4. Свойства 1-16 вещественных чисел.
4. Целая и дробная части числа. Абсолютная величина числа. Утверждения 1, 2, 3 (Представление вещественных чисел в виде бесконечной десятичной дроби), определения 2-7.
5. Определения ограниченного сверху (снизу) множества, ограниченного множества. Верхняя (нижняя) грань множества. Утверждение 1. Точная верхняя (нижняя) множества. Свойства точных верхней и нижней граней множества. Лемма 1.
6. Свойство полноты множества вещественных чисел (формулировка и доказательство).
7. Леммы об отделимости множеств, о системе вложенных отрезков и последовательности стягивающихся отрезков.
8. Неравенство Бернулли. Числовые последовательности (Определение последовательности, примеры, операции над числовыми последовательностями, ограниченные сверху (снизу), ограниченные последовательности, определения бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей, примеры).
9. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей (теоремы 1-5 и следствия из них), доказательства того, что $\{q^n\}$ и $\{nq^n\}$ - бесконечно малые последовательности при $|q| < 1$.
10. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.
11. Предельный переход в неравенствах. Примеры: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
12. 12 Определение монотонных последовательностей. Теорема Вейерштрасса (теоремы 1 и 2).

13. Число e (Теоремы 3 и 4 с доказательством). Последовательность $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Оценка для $r_n = e - a_n$, где $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Оценка для $r_n = e - c_n$, где $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n!}$.
14. Иррациональность числа e (теорема 5). Постоянная Эйлера (теорема 6). Алгебраические и трансцендентные числа.
15. Определение подпоследовательности и частичного предела. Теорема Больцано – Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы. Существование верхнего и нижнего пределов для ограниченной последовательности.
16. Критерий Коши для сходимости последовательности. Пример.
17. Понятие предела числовой функции (определения отображения, функции, проколотой δ-окрестности, предела по Коши и по Гейне).
18. База множеств. Предел функции по базе. Примеры баз. Доказательство, что совокупности множеств $B_0,\ B_1,\ \dots\ ,\ B_6$ удовлетворяют определению базы. Определение ограниченной и финально ограниченной функции.
19. Свойства пределов функции по базе (утверждения 1 – 3 § 12).
20. Свойства пределов функции по базе (утверждения 4 – 7 § 12).
21. Переход к пределу в неравенствах.
22. Критерий Коши существования предела функции по базе.
23. Эквивалентность определений сходимости по Коши и по Гейне.
24. Теоремы о пределе сложной функции (определение сложной функции, теоремы 1 и 2).
25. Теоремы о пределе сложной функции (определение сложной функции, теоремы 3 и 4, примеры).
26. Порядок бесконечно малой функции.
27. Свойства функций, непрерывных в точке.
28. Непрерывность функций $y = a^x$, $y = \sin x$.
29. Замечательные пределы.
30. Непрерывность функции на множестве (определения функции, непрерывной на множестве, на отрезке, неубывающей, невозрастающей, строго возрастающей, строго убывающей, монотонной функции, определение точек разрыва, теорема 1 (о точках разрыва монотонной функции на отрезке)).
31. Непрерывность функции на множестве (теорема 2 (критерий непрерывности монотонной функции), теорема 3 (об обратной функции)).
32. Общие свойства функций, непрерывных на отрезке (теорема об обращении функции в нуль, теорема о промежуточном значении непрерывной функции).
33. Общие свойства функций, непрерывных на отрезке (теорема об ограниченности непрерывной функции, теорема о достижении непрерывной функцией точных верхней и нижней граней).
34. 34 Понятие равномерной непрерывности. Теорема Гейне – Кантора.
35. Свойства замкнутых и открытых множеств (определения замкнутого и открытого множества, утверждения 1 и 2).
36. Компакт. Функции, непрерывные на компакте (определения компакта и покрытия, лемма Бореля, обобщение теоремы Гейне – Кантора, примеры, формулировка свойства функции не быть равномерно непрерывной на множестве, определение непрерывности функции в точке относительно данного множества).
37. Приращение функции. Дифференциал и производная функции. Геометрический и механический смысл производной. Связь понятий дифференцируемости и непрерывности функции. Односторонние производные.
38. Дифференцирование сложной функции.
39. Теорема о производной обратной функции, теорема об инвариантности формы первого дифференциала.
40. Правила дифференцирования. Производные элементарных функций.
41. Производные высших порядков. Формула Лейбница.
42. Дифференциалы высших порядков. Доказательство неинвариантности формы второго дифференциала.
43. Производная функции, заданной параметрически. Примеры функций, заданных параметрически. Производная функции, заданной неявно.
44. Возрастание и убывание функции в точке. Локальные экстремумы. Лемма Дарбу.
45. Теоремы Ролля, Коши и Лагранжа. Следствия.
46. Точки несобственного локального экстремума, теорема Ферма, теорема 4 (еще одна теорема об обращении в нуль производной), теорема 5 (о невозможности для производной иметь точки разрыва первого рода), следствие (теорема Дарбу), бесконечные производные.

47. Следствия из теоремы Лагранжа.
48. Раскрытие неопределенностей. Первое правило Лопиталя и следствия из него.
49. Раскрытие неопределенностей. Второе правило Лопиталя и следствия из него.
50. Локальная формула Тейлора.
51. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме (в форме Шлемильха – Роша)(случай $a < b$).
52. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме (в форме Шлемильха – Роша)(случай $a \geq b$). Частные случаи формулы Тейлора.
53. Применение формулы Тейлора к некоторым функциям.
54. Исследование функций с помощью производных. Экстремальные точки. Достаточные условия достижения функцией локального экстремума в заданной точке.
55. Исследование функций с помощью производных. Выпуклость. Условия выпуклости функции.
56. Точки перегиба. Условия перегиба. Общая схема построения графика функции. Пример.

2) Неопределенный интеграл

1. Точная первообразная. Интегрируемые функции.
2. Свойства неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования (замена переменной интегрирования, интегрирование по частям). Таблица интегралов (с доказательствами).
3. Интегрирование дробно-рациональных функций (выделение правильной рациональной дроби, разложение правильной рациональной дроби на простейшие, метод неопределенных коэффициентов, интегрирование правильных рациональных дробей). Метод Остроградского. Примеры.
4. Интегрирование дробно-рациональных функций (интегрирование простейших рациональных дробей вида I – IV, реккурентная формула).
5. Интегрирование тригонометрических выражений и выражений вида $R\left(e^x\right)$.
6. Интегрирование иррациональных выражений.

3) Интеграл Римана. Приложения интеграла Римана

1. Определение интеграла Римана (неразмеченное разбиение, его свойства, диаметр разбиения, размеченное разбиение, интегральная сумма, определение интеграла Римана, определение функции интегрируемой по Риману, единственность интеграла Римана, интеграл Римана как предел по некоторой базе, ограниченность интегрируемой по Риману функции).
2. Критерий интегрируемости функций по Риману (определения сумм Дарбу, верхнего и нижнего интегралов, леммы 1-6, критерий и его доказательство, примеры про функции Дирихле и Римана).
3. Эквивалентность трех условий интегрируемости функции по Риману.
4. Специальный критерий интегрируемости функции по Риману. Следствие из него.
5. Метод интегральных сумм. Лемма. Примеры: 1)$\int\limits_a^b e^x dx = e^b - e^a$, 2)$\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ $(0 < a < b)$; 3) Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right)$;
6. Классы функций интегрируемых по Риману (Теоремы 1-3).
7. Свойства определенного интеграла (Утверждения 1-6).
8. Свойства определенного интеграла (Утверждения 7-9, Теорема об интегрируемости сложной функции).
9. Аддитивность интеграла Римана (теорема, следствие из нее).
10. Интеграл Римана как функция от его верхнего (нижнего) предела интегрирования. Производная интеграла. (Теоремы 1 и 2).
11. Теорема Ньютона – Лейбница.
12. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле. (Теоремы 1 и 2).
13. Примеры на формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле (примеры 1-9, замечания 1-3).
14. Первая теорема о среднем значении интеграла (теорема 1, следствия 1-3).
15. Вторая теорема о среднем значении интеграла (теорема 2).
16. Вторая теорема о среднем значении интеграла (теорема 3, следствие, пример, теорема 4).
17. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману (определение множества, имеющего лебегову меру нуль, утверждения 1 и 2, критерий Лебега (только формулировка), применения (теоремы 2 и 3 с доказательствами)).
18. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману (формулировка и доказательство, лемма 1).
19. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману (другая его формулировка, лемма 2 и теорема).

20. Определение несобственных интегралов первого и второго рода. Примеры: 1) $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}, \quad a > 0$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.
21. Критерий Коши и достаточные условия сходимости несобственных интегралов. (Теоремы 1 и 2).
22. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Абеля и Дирихле.
23. Несобственные интегралы второго рода (основные определения и свойства). Пример: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$.
24. Замена переменной и интегрирование по частям в несобственном интеграле.
25. Кривые в многомерном пространстве.
26. Теорема о длине дуги кривой. Следствие. Пример: вычисление длины дуги циклоиды.
27. Площадь плоской фигуры и объем тела. Определение меры Жордана.
28. Критерий измеримости множества по Жордану.
29. Свойства меры Жордана.
30. Измеримость спрямляемой кривой. (Лемма, теорема, следствие).
31. Связь между интегрируемостью функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции.
32. Геометрические приложения определенного интеграла (Площадь криволинейной трапеции. Площадь криволинейного сектора.). Примеры.
33. Геометрические приложения определенного интеграла (Длина дуги кривой). Примеры.
34. Геометрические приложения определенного интеграла (Площадь поверхности вращения). Примеры.
35. Геометрические приложения определенного интеграла (Объем тела). Примеры.
36. Физические приложения определенного интеграла (Центр тяжести кривой. 1-ая теорема Гульдена.) Примеры.
37. Физические приложения определенного интеграла (Центр тяжести криволинейной трапеции. 2-ая теорема Гульдена. Работа переменной силы.) Примеры.

4) Дифференциальное исчисление ФНП

1. Понятие функции n переменных. Основные определения и понятия.
2. Непрерывные функции в $\mathbb{R}^n$.
3. Дифференцируемые функции в $\mathbb{R}^n$.
4. Дифференцирование сложной функции. Примеры.
5. Производная по направлению. Градиент. Примеры.
6. Геометрический смысл дифференциала. Примеры.
7. Частные производные высших порядков. Теоремы Шварца и Юнга. Примеры.
8. Дифференциалы высших порядков. Пример. Невыполнение свойства инвариантности формы для 2-го дифференциала.
9. Формула Тейлора. Пример.
10. Локальный экстремум функции многих переменных (Основные определения, необходимое условие экстремума, определение квадратичной формы, положительная (отрицательная) определенность квадратичной формы, критерий Сильвестра). Примеры.
11. Локальный экстремум функции многих переменных (Регулярная точка, достаточное условие экстремума, достаточные условия строгого экстремума функции двух переменных, примеры). Наибольшее и наименьшее значения функции на компакте. Примеры.
12. Неявные функции. Примеры.
13. Система неявных функций. Примеры.
14. Условный экстремум функции многих переменных. Примеры.
15. Дифференцируемые отображения. Матрица Якоби. Примеры.

5) Кратные интегралы

1. Определение и условия существования двойного интеграла. Геометрический смысл двойного интеграла. Свойства двойного интеграла.
2. Сведение двойного интеграла к повторному (случай прямоугольной области). Пример.
3. Сведение двойного интеграла к повторному (случай криволинейной области). Пример.
4. Замена переменных в двойном интеграле. Примеры.

5. Геометрические приложения двойных интегралов (вычисление площади фигуры, объема тела и площади поверхности). Примеры.
6. Физические приложения двойного интеграла (вычисление массы материальной пластинки, вычисление координат центра масс и моментов инерции пластинки). Примеры.
7. Определение и вычисление тройных интегралов. Примеры.
8. Замена переменных в тройном интеграле. Примеры.
9. Приложения тройных интегралов. Примеры.

6) Криволинейные и поверхностные интегралы

1. Определение криволинейного интеграла первого рода.
2. Вычисление криволинейных интегралов первого рода. Примеры.
3. Определение криволинейных интегралов второго рода, сведение их к определенным интегралам.
4. Вычисление криволинейных интегралов 2-го рода. Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода. Примеры.
5. Формула Грина. Пример.
6. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
7. Интегрирование полных дифференциалов. Примеры.
8. Некоторые приложения криволинейных интегралов 1-го и 2-ого рода. Примеры.

7) Числовые и функциональные ряды

1. Числовые ряды (основные определения, утверждение 1 (об остаточном члене ряда)).

   Примеры: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; 2) $a+aq+\ \dots\ +aq^n+\ \dots\ ,\ a\neq 0$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.
6. Числовые ряды (утверждение 2 (отбрасывание любого конечного числа членов ряда), утверждения 3, 4, утверждение 5 (необходимый признак сходимости ряда)).

   Примеры: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$.
7. Числовые ряды (Теорема 1 (критерий Коши), теорема 2 (критерий Коши для расходимости ряда)). Примеры: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.
8. Ряды с неотрицательными членами (определения, теорема 1 (ограниченность последовательности частичных сумм), признаки сравнения (теоремы 2, 3, следствие из теоремы 2)).
9. Признак Даламбера (теоремы 4, 5).
10. Признак Коши (теоремы 6, 7).
11. Признак Раабе (теоремы 1, 2(с доказательствами)). Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.
12. Признаки Куммера, Бертрана, Гаусса (без доказательства).
13. Интегральный признак Коши – Маклорена (с доказательством). Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.
14. Абсолютная и условная сходимость рядов.
15. Ряды Лейбница. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда Лейбница.
16. Формула дискретного преобразования Абеля. Признаки Абеля и Дирихле. Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100} n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$.
17. Перестановки членов ряда. Арифметические операции над сходящимися рядами. Двойные и повторные ряды.
18. Функциональные последовательности и ряды (основные определения). Разложения различных функций по формуле Тейлора как примеры функциональных рядов.
19. Ряд Тейлора. Равномерная сходимость (Определения, теорема 1 (о непрерывности суммы ряда в точке)). Равномерно ограниченные на множестве последовательности. Утверждения 1-4.
20. Критерий равномерной сходимости функциональной последовательности (критерий Коши и его отрицание). Примеры: 1) $\sum_{n=0}^{\infty}x(1-x)^n,\ x\in[0,\ 2)$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n,\ x\in(0,\ 1)$.
21. Признаки равномерной сходимости (критерий равномерной сходимости для бесконечно малой функциональной последовательности, определение мажоранты, признак Вейерштрасса, признаки Абеля и Дирихле). Теорема Дини и следствие из нее.
22. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда (теоремы 1,2 (с доказательством), теорема 3 (без доказательства)). Степенные ряды (основные определения, теоремы 1, 2, 5 (с доказательствами), теоремы 3, 4, 6 (без доказательства)). Бесконечные произведения.

8)

Дифференциальные уравнения

1. Определение дифференциального уравнения первого порядка.
2. Решение дифференциального уравнения. Теорема Коши. Геометрическая интерпретация задачи Коши.
3. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
4. Общее и частное решение уравнения. Примеры.
5. Геометрический смысл дифференциального уравнения.
6. Уравнения с разделяющимися переменными. Примеры.
7. Решение простейших дифференциальных уравнений.
8. Линейные дифференциальные уравнения.
9. Уравнение в полных дифференциалах.
10. Дифференциальные уравнения первого порядка и их применение.
11. Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.
12. Уравнения высших порядков.
13. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Основные понятия.
14. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка.
15. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка.
16. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.